

**1** Klassische Mechanik

Translation in eine Richtung			Rotation um feste Achse		
Ort	$x$	m	Winkel	$\varphi$	rad
Gesch.	$v = \dot{x}$	m/s	Winkelgeschw.	$\omega = \dot{\varphi}$	rad/s
Besch.	$a = \ddot{x}$	m/s <sup>2</sup>	Winkelbeschl.	$\alpha = \dot{\omega}$	rad/s <sup>2</sup>
Masse	$m$	kg	Trägheitsmoment	$J_A = \int r_{\perp}^2 dm$	kg m <sup>2</sup>
Impuls	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Ns	Drehimpuls	$\mathbf{L} = J_A \mathbf{M}$	Nms
Kraft	$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \stackrel{m=const}{=} m\mathbf{a}$	N	Drehmoment	$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}} \stackrel{J=const}{=} J\alpha$	N m
Arbeit	$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	J		$W = \int \mathbf{M} \cdot d\varphi$	J
Kinetische E.	$T = \frac{1}{2}mv^2$	J		$T^* = \frac{1}{2}J\omega^2$	J
Leistung	$P = \dot{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$	W		$P = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$	W

**Bahngeschwindigkeit**  $v = r\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi r f$   $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

**Zentripetalbeschleunigung**  $a_z = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

**2** Wellen

**2.1 WELLENGLEICHUNG**

**1 Dimension**

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi(x, t) - v^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi(x, t)$$

**1-dim. allgemeine Lösung**

$$\xi(x, t) = \underbrace{f_1(x - vt)}_{\text{Ausbreitung in: positive}} + \underbrace{f_2(x + vt)}_{\text{negative}} \quad x\text{-Richtung}$$

**3 Dimensionen**

$$0 = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi - \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \xi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \xi \right)}_{=(\nabla \cdot \nabla) \cdot \xi}$$

**2.2 SPEZIELLE LÖSUNGEN DER WELLENGLEICHUNG**

**1-dim. Harmonische Wellen**

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(k \cdot (x \mp vt)) = \xi_0 \cdot \sin(kx \mp \omega t) = \text{Im}(\xi_0 e^{i(kx \mp \omega t)})$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \cos(k \cdot (x \mp vt)) = \xi_0 \cdot \cos(kx \mp \omega t) = \text{Re}(\xi_0 e^{i(kx \mp \omega t)})$$

**Wellenzahl**  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$

**Kreisfrequenz, Phasendiff.**  $\omega = k \cdot v$   $\Delta\varphi = k \cdot \Delta x$

**Phasengeschwindigkeit**  $v = \frac{\omega}{k} = \nu \cdot \lambda$   $\nu := f$

**Periodendauer, Frequenz**  $T = \frac{2\pi}{\omega}$   $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

**Seilwelle** Sei  $\mathbf{S} = \mathbf{F}/A$  ([N/m<sup>2</sup>]) die Zugspannung erzeugt durch eine Kraft, die auf die Querschnittsfläche  $A$  wirkt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist wie folgt definiert:

$$v = \pm \sqrt{\frac{|\mathbf{S}|}{\rho}}$$

**Wellenformen** Transversal: Auslenkung orthogonal zur Ausbreitungsrichtung; Longitudinal: Auslenkung in Ausbreitungsrichtung

**Longitudinale Wellen im Festkörper** Normalespannung  $\sigma$  und Schubspannung  $\tau$ :

$$\sigma = \frac{dF_{\perp}}{dA}, \quad \tau = \frac{dF_{\parallel}}{dA}$$

Hooke'sches Gesetz für Festkörper:  $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$ ,  $E$ : Elastizitätsmodul:  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

**2-dim. Kreiswellen**

**Form**  $\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{A_1}{\sqrt{r}} \cdot f_1(kr - \omega t) + \frac{A_2}{\sqrt{r}} \cdot f_2(kr + \omega t)$

**3-dim. Kugelwellen**

**Form**  $\xi(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\frac{A_1}{r} \cdot f_1(kr - \omega t)}_{\text{auslaufend}} + \underbrace{\frac{A_2}{r} \cdot f_2(kr + \omega t)}_{\text{einlaufend}}$

**Ebene Welle** Die Phase ist an jedem Ort senkrecht zur Ausbreitungsrichtung identisch:  $\xi(x, y, z, t) = A \cdot f(kz - \omega t)$

**Polarisation transversaler Wellen** Betrachte  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} \mp \omega t)}$ . Eine transversale Welle hat eine Amplitude  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ , wobei  $\mathbf{A} \perp \mathbf{k}$ .

Man nennt sie **linear polarisiert**, falls sie in einer Ebene schwingt. Elliptisch:  $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\Delta\phi} \\ 0 \end{pmatrix}$ . Zirkular mit  $\Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ , wobei rechts- und linkszirkulär zur Ausbreitungsrichtung zu unterscheiden ist.

**2.3 DOPPLEREFFEKT**

Q ... Quelle B ... Beobachter  
 Q sendet Wellen aus mit Größen  $\lambda, u, f$   
 B nimmt Wellen wahr mit Größen  $\lambda_B, f_B$



**Fall**  $v_Q = 0$   $f_B = f + \frac{v_B}{\lambda} = f \cdot \frac{u + v_B}{u}$

**Fall**  $v_B = 0$   $\lambda_B = \lambda - \frac{v_Q}{f}$   $f_B = \frac{u}{\lambda_B} = f \cdot \frac{u}{u - v_Q}$

**Allgemein**  $f_B = f \cdot \frac{u + v_B}{u - v_Q}$

**Schockwelle** Der halbe Winkel des Mach'schen Kegels ist gegeben durch  $\sin \theta = \frac{u}{v_Q}$ .

### 2.4 SUPERPOSITION

**Linearität der Wellengleichung** Wenn  $\xi_1(x, t)$  und  $\xi_2(x, t)$  Lösungen der Wellengleichung sind, ist auch deren Summe eine Lösung  $\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t)$ . Wenn sich zwei Wellen treffen entsteht also durch Addition der Wellenfunktionen eine neue Welle.

### 2.5 SUPERPOSITION HARMONISCHER WELLEN

**Superposition harmonischer Wellen gleicher Amplitude, Frequenz und Richtung**

Sei  $\Delta x = x_2 - x_1$  der Gangunterschied zwischen den Abständen der Quellen. Dann gilt in  $P$  mit Abständen  $x_1, x_2$ :

$$\xi_1(x_1, t) + \xi_2(x_2, t) = \underbrace{2A \cos\left(\frac{\delta + k\Delta x}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\sin\left(kx_1 - \omega t + \frac{\delta + k\Delta x}{2}\right)}_{\text{Harmonische Welle}}$$

Daraus folgt für **Interferenz**:  $\frac{\delta + k\Delta x}{2} = \begin{cases} n\pi & \text{konstruktiv} \\ (n + \frac{1}{2})\pi & \text{destruktiv} \end{cases}$

Allgemein:  $\Delta x = \begin{cases} n\lambda & \text{konstruktiv} \\ (\frac{1}{2} + n)\lambda & \text{destruktiv} \end{cases}$

**Komplex**  $\xi_1(x_1, t) + \xi_2(x_2, t) = \text{Im}(A_1 e^{i(k_1 x_1 - \omega_1 t)} + A_2 e^{i(k_2 x_2 - \omega_2 t)})$

**Superposition harmonischer Wellen gleicher Amplitude und Frequenz, entgegengesetzte Richtung**

Seien  $\xi_1(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ ,  $\xi_2(x, t) = A \cos(-kx - \omega t + \delta_R)$ .

$$\xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right) \text{ (stehende Welle)}$$

**Amplituden reflektierter und transmittierter Wellen** Wir betrachten die auftreffende ( $k_1$ ), reflektierte und transmittierte ( $k_2$ ) Welle. Sei  $\alpha := \frac{k_2}{k_1}$  mit den Amplituden  $A, R, T \geq 0$ .

$$R = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A \text{ und } T = \frac{2A}{1 + \alpha}$$

### 2.6 STEHENDE WELLEN

$$\xi = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right)$$

Bei Reflexion am weichen Medium (loses Ende) ist  $\alpha \ll 1, \delta_R \approx 0$ .

Bei Reflexion am harten Medium (festes Ende) ist  $\alpha \gg 1, \delta_R \approx \pi$ .

**Energieverteilung stehender Wellen** (Formeln folgen aus denen zu Energietransport)

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = 2\rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t)$$

$$\frac{dW_{el}}{dV} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = 2\rho A^2 \omega^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t)$$

**Eigenschwingungen einer Saite** Mit dem Ansatz  $\xi(x, t) = u(x) \cdot \cos(\omega t + \delta)$  erhält man  $u(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ . Seien  $x = 0$  und  $x = l$  die Endpunkte der Saite,

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n}, \omega_n = k_n v:$$

	Randbedingung	A	$k_n$	$\omega_n$
Beidseitig eingespannt	$u(0) = u(l) = 0$	0	$\frac{n\pi}{l}$	$\frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$
Einseitig eingespannt	$u(0) = 0, u(l) = B = u_0$	0	$\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}$	$\frac{n\pi}{2l} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$
Nicht eingespannt			$\frac{n\pi}{l}$	$\frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$

### 2.7 ENERGIETRANSPORT & INTENSITÄT

**Allgemeine longitudinale Welle im elastischen Stab**

$E$  ... Elastizität  $u := x - vt$   $f(u) = \xi(x, t) \implies \frac{\partial}{\partial u} f = \frac{\partial}{\partial x} \xi$

**Kinetische Energiedichte**  $\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial}{\partial u} f\right)^2$

**Elastische Energiedichte**  $\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial}{\partial u} f\right)^2$

**Energiedichte (ges.)**  $\frac{dW}{dV} = \frac{dT}{dV} + \frac{dE_{el}}{dV} = E \left(\frac{\partial}{\partial u} f\right)^2 = \rho v^2 \left(\frac{\partial}{\partial u} f\right)^2$

**Spezialfall: harmonische Welle im elastischen Stab**

$\xi(x, t) = A \cdot \cos(kx - \omega t)$

**Energiedichte**  $\frac{dW}{dV} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$

**Mittlere Energiedichte während Periode T**

$$\left\langle \frac{dW}{dV} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dV} dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

**Energieflussdichte & Intensität**

**Energieflussdichte**  $S = \frac{d^2 W}{da dt} \cdot \frac{da}{|da|} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}, [S] = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$

**Energiestrom**  $\frac{dW}{dt} = \iint_A \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}, [\dot{W}] = J/s = W$

**Intensität**  $I := |\mathbf{S}| = \frac{dW}{V} \cdot v$ .

Die Mittlere Intensität ist somit  $\langle I \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^3}{k} A^2$ . Bei sich ausbreitenden Wellen ist die mittlere Leistung durch eine Oberfläche  $P = \int_A \langle I \rangle d\mathbf{a}$  von der Entfernung unabhängig (Energieerhaltung)

### 2.8 BEUGUNG AM GITTER

Wir betrachten äquidistante kohärente Quellen von Kugelwellen  $Q_1, \dots, Q_N$  und wollen ihre überlagerte Amplitude in  $P$  berechnen. Seien  $r_n$  die Abstände von  $P$  zu  $Q_n$ . Dann gilt insgesamt  $\xi(\alpha) = \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{a}{r}}_{\text{Approx. } r \approx r_n} e^{i(kr_n - \omega t)} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} e^{i(kr - \omega t)}$  ( $a$  ist die Amplitude.). Das folgt mit folgenden Formeln.

**Phasendifferenz benachbarter Quellen**  $\Delta\varphi = k\Delta s = k\delta \sin \alpha$ . Daraus folgt  $r_n = r + \underbrace{(M+1-n)\Delta s}_{\text{mittlere Quelle}} \implies kr_n = kr + (M+1)\Delta\varphi - n\varphi$

**Maxima und Minima** Maxima der Intensität:  $\Delta\varphi = n \cdot 2\pi \implies \sin \alpha_n = n \cdot \frac{\lambda}{d}$   
 Minima der Intensität:  $\Delta\varphi = n \cdot 2\pi + \pi \implies \sin \alpha_n = (n + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{d}$

**Intensität**  $\langle I \rangle \sim \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}$

### 2.9 BRECHUNG

**Reflexionsgesetz**  $\alpha_{\text{Einfall}} = \alpha_{\text{Ausfall}}$

**Snellius'sches Brechungsgesetz**  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$

3 Elektrostatik

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  konstant  $[\epsilon_0] = \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$   $\rho, \sigma, \lambda \dots$  Ladungsdichte  $[\rho] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$

#### 3.1 COULOMB'SCHES GESETZ

**Kraft auf Ladung  $q_2$  durch Präsenz von Ladung  $q_1$**

$$\mathbf{F}_{21} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \cdot \widehat{\mathbf{r}}_{21}$$

#### 3.2 ELEKTRISCHES FELD $\mathbf{E}$

**Def. elektrisches Feld**  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) := \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)}{q}$   $[\mathbf{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}}$

**Kraft auf Ladung  $q$  durch Feld  $\mathbf{E}$**   $\mathbf{F}_{qE} = q \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_q)$

#### Beispiele elektrischer Felder

**$n$  Punktladungen**  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = k \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^2} (\widehat{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0})$

**gel. ausgedehnter Körper**  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = k \cdot \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} (\widehat{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}) dV$

#### 3.3 EL. POTENTIAL $\phi$ DES EL. FELDES $\mathbf{E}$

**verr. Arbeit um  $q_1$  im Feld  $\mathbf{E}$  von  $A$  nach  $B$  zu bringen**

$$W_{\text{ext}} = \int_A^B -\mathbf{F}_{qE}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = q_1 \cdot \underbrace{\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}}_{\phi_{BA} = \phi(B) - \phi(A)} = q_1 (\phi(B) - \phi(A))$$

**Def. Potentialdifferenz**  $\phi_{BA} := - \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$   $[\phi] = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$

**Zsmhang el. Feld & el. Potential**  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

**Pot. el. Energie einer Punktl.  $q$  im el. Potential  $\phi$**   $U = q \cdot \phi$

#### Beispiele elektrischer Potentiale

**$n$  Punktladungen**  $\phi(\mathbf{r}_0) = k \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|}$

**gel. ausgedehnter Körper**  $\phi(\mathbf{r}_0) = k \cdot \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV$

#### 3.4 ENERGIE / GESP. ARBEIT EINER LADUNGSVERTEILUNG

Im Folgenden ist gefordert dass  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = 0$ .

**$n$  Punktladungen**  $W = k \cdot \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = k \cdot \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$

**gel. ausgedehnter Körper**  $W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV$

**Energiedichte des elektrischen Feldes**  $u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ , also insgesamt  $U = \int_V \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV$

#### Beispiele

**Unendlich lange gleichmässig geladener Draht**  $E(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$

**Unendlich ausgedehnte gleichmässig geladene Ebene**  $E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

**Plattenkondensator**  $E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

**Potential einer Punktladung**  $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

**Potential im inneren einer Kugelladung**  $\phi(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0}r^2 + c$  mit  $c = \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0}$

### 3.5 FLUSS, 1. MAXWELL-, POISSON-, LAPLACE-GLEICHUNG

**Fluss des el. Feldes durch geschlossene Fläche  $\partial V$  um Ladung**

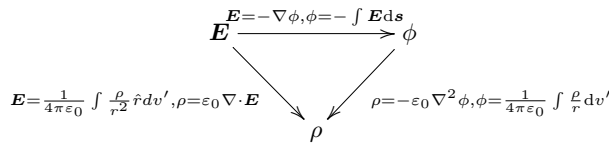
$$\Phi := \int_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\int_V \rho(\mathbf{r}) dV}_{(=\sum_V q_i)} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

1. Maxwell-Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$

Spezialfall 2. Maxwell-Gleichung  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$

Poisson-Gleichung  $\Delta\phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$

Laplace-Gleichung  $\rho(\mathbf{r}) = 0 \implies \Delta(\phi) = 0$



## 4 Elektrische Leiter

### 4.1 LEITER UND ISOLATOREN

**Eigenschaften von Leitern** Ein Leiter zeichnet sich durch hohe Beweglichkeit von Ladungen aus

1. Die Ladungen verschieben sich so, dass  $\mathbf{E} = 0$  im Inneren des Leiters
2. Wegen Gauss'schen Gesetz befindet sich überschüssige Ladung auf Oberfläche des Leiters
3. Das Potenzial hat im gesamten Inneren und auf der Oberfläche den gleichen Wert (wegen 1.)
4. Das elektrische Feld in der Nähe der Oberfläche verschwindet im Inneren und steht senkrecht auf der Oberfläche. Aussen, in der Nähe der Oberfläche ist  $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ .
5.  $\sigma$  ist grösser, je gekrümmter die Oberfläche ist.
6. Faraday'scher Käfig: Das Hohlraum eines Leiters ist von äusseren Einflüssen abgeschirmt. Es hat ausserdem effektiv kein elektrisches Feld, wenn sich keine Ladung in ihm befindet.

**Influenz** Verschiebung der Ladungen in einem Leiter durch externe Felder.

### 4.2 KONDENSATOR

**Kapazität** Ein Leiter trägt die Ladung  $Q = C\phi$  (relativ zu  $\phi(\infty) = 0$ ), wegen

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz'}_{\sim Q}$$

$\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad}$ .

gesp. Ladung, Kapazität, Potential  $Q = C \cdot \phi$   $[C] = \frac{C}{V}$

#### Plattenkondensator

**Kapazität, el. Feld**  $C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$   $E = \frac{V}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  homogen

**Energie / gesp. Arbeit**  $W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

**Parallelschaltung**  $C = \sum_{i=1}^n C_i$

**Serienschaltung**  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

## 5 Elektrische Ströme

### 5.1 STROMDICHTEN, STROMSTÄRKE, LADUNGERHALTUNG

**Stromdichte**  $\mathbf{J} = n \cdot q \cdot \vec{v}$   $n = \frac{\#\text{Ladungstr.}}{V}$   $[\mathbf{J}] = \frac{C}{s \cdot m^2}$

**Stromstärke**  $I_A = \frac{dQ}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$   $[I] = \frac{C}{s} = A$   $j dV = I dl$  In ein 1D gilt:  
 $\mathbf{I} = \mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v}$

**Stromst. durch  $\partial V$**   $I_{\partial V} = -\int_V \frac{dq}{dt} dV = \int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial V} \nabla \cdot \mathbf{J} dV$

**Kontinuitätsgleichung**  $\implies \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{dq}{dt}$

### 5.2 OHM'SCHES GESETZ, WIDERSTÄNDE

$\sigma$  ... Leitfähigkeit  $\rho := \frac{1}{\sigma}$  ... spezifischer Widerstand

(mikrosk.) Ohm'sches Gesetz  $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$

**Widerstand eines Schaltelements**  $R = \frac{V}{I}$   $[R] = \frac{V}{A} = \Omega$

**zylindrischer Leiter**  $R = \frac{\rho \ell}{A} = \frac{\ell}{\sigma \cdot A}$

**Parallelschaltung**  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

**Serienschaltung**  $R = R_1 + R_2$

**Leistung**  $P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$

**Driftgeschwindigkeit**  $|\mathbf{v}| = \frac{I \cdot M}{\rho N_A e A}$  M= Molare Masse, A= Fläche

5.3 SCHALTKREISE

**Kirchhoff'sche Regeln**

- Für jedes Schaltelement gilt das Ohm'sche Gesetz.  $V_i = R_i I_i$ .
- An jedem Knoten addieren sich die Ströme zu Null.  $\sum I_i = 0$
- Über jede Schleife addieren sich die Potentialdiff. zu Null.  $\sum V_i = 0$

6 **Einführung in die Relativitätstheorie**

$(ct, x, y, z)^T$  ... Laborsystem K  $(ct', x', y', z')^T$  ... bewegtes System K' Achsen zeigen jeweils in die gleiche Richtung. K' bewegt sich in K mit

$$v = v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \beta := \frac{v}{c} \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

**Zeitdilatation**  $\Delta t = \gamma \Delta t'$

**Längenkontraktion**  $\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'$

**"Licht"-Invariante**  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$

**Lorentztransformation**

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(ct - \beta x) \\ \gamma(x - \beta ct) \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \\ \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**L.-Transf. von zu v parallelen Geschwindigkeiten**  $u = \lambda v$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

**Raumzeit-Intervall**  $\Delta s^2 := (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$

**Invarianz des Raumzeit-Intervalls**  $\Delta s^2 = \Delta s'^2$

**Energie eines ruhenden Massenpunktes**  $E = mc^2$

**Geschwindigkeit eines Teilchens**  $v = \frac{p}{E_{tot} \cdot c}$

**Kraft auf ein Teilchen in beschl. Bezugssystemen**  $m\gamma a = F - \frac{1}{c^2}(F \cdot v) \cdot v$

6.1 ENERGIE UND IMPULS EINES BEWEGTEN MASENPUNKTES

$$E = \gamma \cdot mc^2 = mc^2 + E_{kin} \quad p = \gamma \cdot mv \quad \implies E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

**Taylorentwicklung des Lorentzfaktors bei  $\beta^2 = 0$**   $\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^3)$

**Taylorentwicklung von  $\frac{1}{1-\beta^2}$  bei  $\beta^2 = 0$**   $\frac{1}{1-\beta^2} \approx 1 + \beta^2 + \mathcal{O}(\beta^3)$

**Energie eines Photons**  $E = h\nu = pc$

**Masse-Energie-Äquivalenz** Für die **relativistische Energie** (kinetische und Ruheenergie) einer bewegten Masse gilt  $E = \gamma mc^2$ . Die **kinetische Energie** ist also definiert durch  $E_{kin} := E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$ . Die relativistische Energie ist innerhalb eines Inertialsystems eine Erhaltungsgröße.

**Relativistische Energie-Impulsbeziehung**  $E^2 - (cp)^2 = E_0^2$

**Vierergeschwindigkeit** Geschwindigkeiten sind nach dem Additionstheorem nicht lorentzinvariant. Deshalb definiert man die Vierergeschwindigkeit durch  $u^\mu = c\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$  für die gilt  $u_\mu u^\mu = c^2$ . Sie ist also Lorentz-invariant.

**Geschwindigkeit in K'**  $v' = \frac{dx'}{dt'}$

**Viererimpuls** Der Viererimpuls ist mit der Vierergeschwindigkeit definiert, also  $p^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = mc\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p \end{pmatrix}$  für den gilt  $p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = (mc)^2$ , er ist also

Lorentz-invariant. Er lässt sich **mit Lorentz-Matrizen** genauso transformieren, wie auch andere Vierervektoren. Man nennt  $p = \gamma mv$  aus der 1. Gleichung den **relativistischen Impuls**.

6.2 IMPULSAUFGABEN

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. Schreibe die Impulse in einem einfachen Inertialsystem auf | 2. Löse die Komponentengleichungen die durch die Impulserhaltung entstehen | oder stelle Gleichungen über den Lorentzskalar des Impulses auf. |
|---|--|--|

**Kraft** Es ist nach wie vor  $F = \frac{dp}{dt}$ , wobei  $p$  der relativistische Impuls ist. Es kommt also meistens ein  $\gamma$  zur Kraft zu. Nutze Tricks wie  $\frac{d^2 r}{dt'^2} = \frac{d^2 r}{(\frac{1}{\gamma})^2 dt^2}$  für  $t' = \frac{t}{\gamma}$

**Dopplereffekt des Lichts**

Sei  $K^*$  relativ zu  $K$  mit  $\beta$  bewegt.  $K^*$  emittiert Licht mit Frequenz  $\nu^*$  unter einem Winkel  $\vartheta$  in  $K$  zur Bewegungsrichtung. In  $K$  wird dann folgende Frequenz  $\nu$  wahrgenommen:  $\frac{\nu}{\nu^*} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta)}$ . Der longitudinale ( $\vartheta = 0$ ) also  $\frac{\nu}{\nu^*} = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}$  und transversale ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ) Dopplereffekt ergeben sich mit als Spezialfälle daraus. Das Vorzeichen von  $\beta$  muss an die Bewegungsrichtung von  $K$  und  $K^*$  zueinander angepasst werden (aufeinander zu:  $\beta > 0$ , voneinander weg:  $\beta < 0$ ).

7 **Felder bewegter Ladungen**

**Elektrisches Feld mit  $\beta$  relativ zu  $K'$  bewegter Ladungen in Kugelkoordinaten** Durch die Berechnung von  $E_x$  und  $E_y$  mit relativistischen Transformationen und ausnutzen von  $E^2 = E_x^2 + E_y^2$  erhält man  $E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta')^{\frac{3}{2}}}$

**Felder beschleunigter Ladungen** Sei  $T$  die seit Beschleunigungsbeginn vergangene Zeit und  $a = \frac{v_0}{\tau}$  die Beschleunigung.  
 Bei beschleunigten Ladungen gilt für den Teil des Feldes mit Radial- und Tangentialkomponente:

$$\frac{E_\vartheta}{E_r} \approx \frac{v_0 T \sin \vartheta}{c\tau}$$

Der radiale Anteil kann ganz normal berechnet werden (Feld einer Punktladung).

Für die Energiedichte des Tangentialfeldes gilt:  $U_{E_\vartheta} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_0 E_\vartheta^2}{2} dV = \frac{1}{3} \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \tau$ .

**Ladungsinvarianz**  $Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \epsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}$  ist unabhängig vom Bezugssystem

**Transformation eines elektrischen Feldes**  $E'_\parallel = E_\parallel \quad E'_\perp = \gamma E_\perp$

**8 Magnetische Felder**

$\mu_0 := \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$  ... Permeabilität des Vakuums  $[\mu_0] = \frac{Vs}{Am}$

**8.1 MAGNETISCHES FELD  $B$**

**Lorentzkraft auf eine Ladung**  $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad F = qvB \sin \varphi$

**Lorentzkraft auf einen Leiter**  $\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B}) \quad F = IlB \sin \varphi \quad d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$

**Magnetfeld um einen stromdurchfl. Draht**  $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$

**Ampère'sches Gesetz**  $\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I_{\text{eing.}}$

**Spezialfall 4. Maxwellgleichung**  $\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

**2. Maxwellgleichung**  $\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

**Beispiele magnetischer Felder**

im Zentrum eines Leiterringes  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

im Innern einer Spule  $B = \mu_0 n I$

**8.2 VEKTORPOTENTIAL  $A$  VON MAGN. FELD  $B$**

**Analogon Poissongleichung**  $\Delta A = \nabla \cdot \nabla A = -\mu_0 \mathbf{J}$

**Coulomb-Eichung** Definiere  $A$  so, dass  $\nabla A = 0$ . Finde also ein Vektorfeld  $\nabla F = f, \nabla \times F = 0$  mit  $\nabla A = f$  und setze  $A' = A - F$ .

**Vektorpotential**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV$$

Bei einem Leiter parametrisiert durch  $\gamma$  gilt  $\mathbf{J}dV = Id\mathbf{l}$ . Also wird obige Formel zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\gamma \frac{Id\mathbf{l}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

**Zsmhang magn. Feld & magn. Vektorpotential**  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

**Magnetfeld-Element (Biot-Savart)**

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}) dV = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I(d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\gamma \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

**Magnetfeld in einer Leiterschleife in der  $xy$ -Ebene**  $B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

**Energiedichte des Magnetfeldes**  $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$

**Energiedichte des elektrischen Feldes**  $u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$

**magnetisches Moment und Drehmoment**  $\mu = N \cdot I \cdot A \quad \tau = \mu \times \mathbf{B}$

**8.3 STETIGKEITSBEDINGUNGEN DES ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN FELDES**

**Differenz elektrischen Feldes auf unendlich ausgedehnter geladener Ebene in unmittelbarer Nähe**  $E_\parallel^+ - E_\parallel^- = 0, \quad (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

**Differenz magnetischen Feldes auf unendlich ausgedehnter stromführender Ebene in unmittelbarer Nähe** Die **Oberflächenstromdichte** ist definiert als  $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$ . Es gilt  $(\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = \mu_0(\mathbf{K} \times \mathbf{n})$ .

**8.4 HALL-EFFEKT**

Ladungstrennung bewegter Ladung im Magnetfelder führt zu einem Kräftegleichgewicht, bei welchem diese Spannung zwischen den Leiterenden anliegt:  $V_H = \frac{1}{\rho h} I_H \cdot B$ , wobei  $h$  die Dicke des Leiters in Magnetfeldrichtung und  $\rho$  die Ladungsdichte ist.

**8.5 RELATIVISTISCHE TRANSFORMATIONEN**

Ladungsdichten sind *nicht* Lorentzinvariant, was ein verschieden starkes Auftreten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  Feldern in verschiedenen Inertialsystemen bewirkt. Mit  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel, \mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$  (Ausrichtung bezogen auf Bewegungsrichtung  $\beta$  der Inertialsysteme zueinander):

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel & E'_\perp &= \gamma(\mathbf{E}_\perp + c\beta \times \mathbf{B}_\perp) \\ B'_\parallel &= B_\parallel & B'_\perp &= \gamma\left(\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c}\beta \times \mathbf{E}_\perp\right) \end{aligned}$$

**Spezialfall  $B = 0$**   $\mathbf{B}' = -\frac{\beta}{c} \times \mathbf{E}'$

**9 Magnetische Induktion**

**9.1 ALLGEMEINES INDUKTIONSGESETZ**

**Induktion 1. Art** Induktion durch Bewegung des Leiters im Magnetfeld/ Veränderung der Fläche

**Induktion 2. Art** Induktion durch Veränderung der magnetischen Feldstärke

**Magnetischer Fluss durch eine geschlossene Leiterschleife**  $\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$

**9.2 FARADAY'SCHES GESETZ**

**Integrale Form des Faraday'sches Gesetzes (Induktion 2. Art)**  $\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$

**Induktion 1. Art**  $\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_{\partial A} \mathbf{E}_{ind} ds = \iint_A \nabla \times \mathbf{E}_{ind} d\mathbf{a} = -\oint_{\partial A} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$  insbesondere gilt  $\mathbf{E}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

**3. Maxwellgleichung**  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

**Lenz'sches Gesetz** Die magnetisch induzierte elektromotorische Kraft erzeugt ihrerseits ein Magnetfeld, das der Änderung des Flusses entgegenwirkt

**Gegenseitige Induktion und Selbstinduktion**

**Gegenseitige Induktivität**  $\boldsymbol{\varepsilon}_{21}$  ist die in  $C_2$  induzierte Spannung durch eine Änderung der Stromes  $I_1$  (der durch  $C_1$  fließt) und es gilt:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{21} := -M_{21} \dot{I}_1$

**Reziprozitätsgesetz**  $M := M_{21} = M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{I_1}$ ,  $[M] = \Omega \cdot s = H$

**Selbstinduktivität** Die Änderung des eigenen Magnetfeldes eines Leiters erzeugt in diesem wegen der Flussänderung eine elektromotorische Kraft:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ind} = -L \cdot \dot{I}$

**Selbstinduktivität einer Spule** Es gilt  $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$ , der Gesamtfluss durch alle N Schleifen:

$\Phi = \mu_0 \frac{AN}{l} I \cdot N$ , somit gilt:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \frac{AN^2}{l} \frac{dI}{dt} \Rightarrow L = \mu_0 \frac{AN^2}{l}$

**Gespeicherte Energie in einer Spule**  $U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$

**10 Wechselströme**

Ziel:  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , also Stromamplitude und Phase relativ zur Störung  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$  finden.

**10.1 WICHTIGE STROMKREISTYPEN**

**RLC-Stromkreis Resonanz** (maximale Leistung, keine Phase zwischen Strom und Spannung, Induktivität und Kapazität heben sich auf):  $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

**Qualitätsfaktor** Relative Breite des Leistungspeaks:  $Q = \frac{L\omega_{max}}{R}$

**10.2 BESCHREIBUNG DURCH KOMPLEXE ZAHLEN**

**Komplexe Schreibweise** Wir können Wechselströme und -spannungen als komplexe Exponentialfunktionen schreiben. Sei  $I_r = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$  und  $I_c = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$ , so dass  $I_r = \text{Re}(I_c)$ . Der komplexe Strom lässt sich auch schreiben als  $I_c = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ , wobei dann  $\tilde{I}_0 := I_0 e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ . Wir schreiben für die Spannung  $V = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ .

**Admittanz und Impedanz eines Schaltelements** Schreibe für die Spannung  $V = ZI$  mit der Impedanz  $Z$ . Man nennt  $Y = \frac{1}{Z}$  die Admittanz.  $Y$  bzw.  $Z$  lassen sich schreiben als  $Y = |Y|e^{i\alpha}$  bzw.  $Z = |Z|e^{-i\alpha}$ , wo man die Phasenverschiebung durch die Admittanz / Impedanz sieht.

**Parallelschaltung Ersatzadmittanz**  $Y_{ges} = \sum_j Y_j$

**Reihenschaltung Ersatzimpedanz**  $Z_{ges} = \sum_j Z_j$

**Bestimmung der Phase und Amplitude an einem Schaltelement**

$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Im}(Y)}{\text{Re}(Y)}\right) = \arctan\left(-\frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}\right)$  und  $I_0 = |\tilde{I}_0|$

**Kirchhoff'sche Regeln** Die Kirchhoff'schen Regeln gelten für komplexe Schaltkreise weiterhin. Der entscheidende Vorteil ist, dass Strom- und Spannungsfrequenz überall gleich ist und man deshalb in den Gleichungen den  $e^{i\omega t}$  Term kürzen kann und nur noch Gleichungen komplexer Zahlen umformen muss.

**Wichtige Impedanzen**

Komponente	Admittanz	Impedanz	Strom...
R	$\frac{1}{R}$	$R$	-
L	$-\frac{i}{\omega L}$	$i\omega L$	ist spät an der Induktivität.
C	$i\omega C$	$-\frac{i}{\omega C}$	geht vor am Kondensator.

**Division durch komplexe Zahlen**  $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

**10.3 LEISTUNGS-AUFNAHME**

$P = IV$  lässt sich nicht komplex berechnen, da im Allgemeinen  $\text{Re}(IV) \neq \text{Re}(I)\text{Re}(V)$ .

**Durchschnittliche Leistungsaufnahme bei Phase  $\alpha$  zwischen  $I$  und  $V$**   $\langle VI \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \alpha$

**Blindstrom / Blindleistung** Bei  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  wird effektiv keine Arbeit verrichtet.

**Effektivwerte von Strom und Spannung** Es soll  $\langle VI \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos \alpha(*)$  gelten. Also setze  $V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ ,  $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ .

**Transformator** Wegen (\*) und  $V_0 \sim I_0$  sieht man, dass es günstig ist, elektrische Energie mit niedrigem Strom zu transportieren.

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \approx \frac{I_2}{I_1}$ .

**Vorzeichen gegenseitige Induktionsspannung in Maschenregel**

zeichen von Selbstinduktion und gegenseitiger Induktion gleich

- 1. Lege Strom- und Umlaufrichtung fest
- 2. Wenn die magnetischen Flüsse beider Spulen in die gleiche Richtung zeigen, sind Vorzeichen von Selbstinduktion und gegenseitiger Induktion verschieden
- 3. Wenn die magnetischen Flüsse beider Spulen unterschiedliche Richtungen zeigen, sind Vorzeichen von Selbstinduktion und gegenseitiger Induktion gleich

**11 Maxwellgleichungen und elektromagnetische Wellen**

### 11.1 DIE MAXWELGLEICHUNGEN

#### Die Maxwell-Gleichungen

	Integrale Form	Differenzielle Form
Gauss'sches Gesetz	$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{n} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Nichtexist. magnet. Monopole	$\oint_A \mathbf{B} d\mathbf{n} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Faray'sches Gesetz	$\int_A \mathbf{E} ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{n}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampere'sches Gesetz	$\oint_A \mathbf{B} ds = \mu_0 I_{eing} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{E} d\mathbf{n}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

**Bemerkung zum Maxwell'schen Verschiebungsstrom** Bei annähernd statischen elektrischen Feldern kann dieser vernachlässigt werden, so dass das Ampere'sche Gesetz gilt.

**Kontinuitätsgleichung**  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

### 11.2 DIE HOMOGENE WELLENGLEICHUNG

**Homogene Maxwellgleichungen** Im Vakuum gilt  $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$ . Also erhält man die homogenen Maxwellgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

**Homogene Wellengleichungen** Man erhält aus diesen wiederum:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

**Lösung der homogenen Wellengleichung** Obige Gleichung entspricht unserer früheren homogenen Wellengleichung und hat also eine Lösung der Form  $f(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$  und muss die Maxwellgleichungen erfüllen.

Die wichtigste Lösung dieser Wellengleichung ist  $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}$

mit  $\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{B}_0 = \frac{k}{\omega} \times \mathbf{E}_0, \mathbf{k} := kz$  (ebene transversale Welle).

Insbesondere:  $\frac{E_0}{B_0} = c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{B} \times c\hat{\mathbf{k}}$

In reeller Schreibweise:  $\mathbf{E} = E_0 \sin(kz - \omega t)\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = B_0 \sin(kz - \omega t)\mathbf{e}_y.$

### 11.3 ENERGIETRANSPORT

**Energiedichte elektromagnetischer Wellen**  $u_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$

**Poynting-Vektor**  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$

**Poynting-Fluss**  $S = \frac{1}{\mu_0} \langle EB \rangle$  (durchschnittliche Leistung pro Fläche)

**Poynting-Theorem** Es gilt für die Arbeit, die elektromagnetische Felder pro Zeit und Volumen an Ladungsträgern verrichten:  $\frac{d^2 W}{dV dt} = \frac{\partial u_{mech}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ . Man findet durch die Maxwellgleichungen:

$$\frac{\partial (u_{mech} + u_{em})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

also nimmt das elektromagnetische Feld beim Aufwenden mechanischer Arbeit oder Abgabe elektromagnetischer Wellen ab.

**Lorentztransformationen** Die Maxwellgleichungen sind unter Lorentztransformationen invariant. Genauso bleiben Transversalität und  $E = cB$  der elektromagnetischen Wellen vom Inertialsystem invariant.

### 11.4 WELLENGLEICHUNG FÜR POTENTIALE

**d'Alembert-Operator**  $\square := \Delta - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

**Lorenzbeziehung** Sei  $\mathbf{A}$  das Potential von  $\mathbf{B}$ . Dann bezeichnet die Lorenzbeziehung folgende Bedingung:  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ .

**Wellengleichungen** Sei  $\mathbf{A}$  das lorenzgeeichte Potential von  $\mathbf{B}$ . Mit  $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$  (aus 3. Maxwellgleichung mit "Integrationskonstante"  $\phi$ ) folgen mit den Maxwellgleichungen die Wellengleichungen

$$\Delta \phi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Delta \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

**Retardierte Potentiale** Diese Gleichungen werden durch die retardierten Potentiale (Potentiale "kennen" Ladungs-/ Stromverteilungen der Vergangenheit) gelöst:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

**Vierervektoren** Man definiert folgende Vierervektoren  $A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}), \quad J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$ .

Wir definieren die kovariante Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} := (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$  und die kontravariante Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} := (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$ . Dann folgt  $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$  und  $\square A^\mu + \mu_0 J^\mu = 0$ .

### 11.5 DER HERTZ'SCHE DIPOL

**Elektrisches Dipolmoment** Das elektrische Dipolmoment charakterisiert eine räumliche Ladungstrennung:  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ .

**Dipol und Strom am Hertz'schen Dipol** Im  $RL$ -Schwingkreis eines Hertz'schen Dipols machen wir den Ansatz  $q(t) = q_0 \sin(\omega t)\mathbf{l}$ , also  $I(t) = \underbrace{\omega q_0}_{=I_0 = \frac{\omega p_0}{l}} \cos(\omega t)$ .

**Lösung der retardierten Potentiale**

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu_0 l}{4\pi r} I\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \underbrace{\frac{z}{r^3} p\left(t - \frac{r}{c}\right)}_{\text{Nahfeld statischen Dipols}} + \underbrace{\frac{z l}{c r^2} I\left(t - \frac{r}{c}\right)}_{\text{Fernfeld Änderung B-Feld}} \right)$$

**Felder** Aus den Formeln für die retardierten Potentiale folgt für die Felder in Kugelkoordinaten:

$$E_\theta = -\frac{\omega l I_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right), \quad B_\phi = -\frac{\omega l I_0}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right).$$

Also insbesondere  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  und  $\frac{E}{A} \sim EB \sim \frac{1}{r^2}$  (Energieerhaltung)

**Durchschnittliche Leistung** Die Leistung ist  $P = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\omega^2 I^2 J^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \sin^2(\omega(t - \frac{r}{c}))$ . Also ist die zeitlich mittlere Leistung  $\langle P \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$ .

**Mittlere Intensität und Strahlungsdruck**  $\langle S \rangle = \frac{P}{A}$   $P_{Strahlung} = \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{2}{c} \langle S \rangle$

**Impulsdichte pro Volumeneinheit**  $\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$   $\mathbf{p} = \boldsymbol{\pi} \cdot A c \Delta t$

**Zeitlich gemittelte Leistung**  $\langle P \rangle = \int_A \langle S \rangle da$

**12 Elektrische und magnetische Felder in Materie**

**12.1 DIELEKTRIKA UND ELEKTRISCHE DIPOLE**

**Kapazität eines Plattenkondensator in Materie**  $C = \epsilon C_{vak}$  mit Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$

**Elektrisches Feldstärke in Materie**  $E = \frac{1}{\epsilon} E_{vak}$

**Dipolmoment einer Ladungsverteilung**  $\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV$

**Drehmoment auf ein Dipol im elektrischen Feld**  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext}$ . Also ist die potenzielle Energie (bzgl. der Dreharbeit) gegeben durch  $U_{pot} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}$ .

**Nettokraft in einem inhomogenen Feld**  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \nabla E_x \\ \mathbf{p} \cdot \nabla E_y \\ \mathbf{p} \cdot \nabla E_z \end{pmatrix}$

**Polarisationsdichte**  $\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = n\mathbf{p}$  mit der Teilchendichte  $n$ .  
 $\rho = \rho_{geb} + \rho_{frei}$

**Divergenz der Polarisationsdichte**  $\rho_{geb} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

**Elektrische Flussdichte**  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ .

**Gauss'sches Gesetz im Dielektrikum**  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{frei}$ . Es folgt  $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ .

**12.2 MAGNETISCHE DIPOLE**

**Magnetisches Moment** Magnetisches Moment einer Stromschleife:  $\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  ist aber auch eine Eigenschaft von Materialien wegen deren Elektronenspin (Paramagnetismus). Es gilt  $\mathbf{B} \parallel \boldsymbol{\mu}$ .

**Drehmoment auf ein magnetisches Moment in Magnetfeld**  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{ext}$

**Nettokraft in inhomogenem Feld**  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla B_x \\ \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla B_y \\ \boldsymbol{\mu} \cdot \nabla B_z \end{pmatrix}$

**12.3 DAS H-FELD**

**Magnetisierung eines Materials bestehend aus magnetischen Dipolen**  $\mathbf{M} = n\boldsymbol{\mu}$  mit Teilchendichte  $n$  von Teilchen mit Dipolen  $\boldsymbol{\mu}$ . Es entstehen gebundene Ströme durch die Magnetisierung:  
 $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_{geb}$ .

**Magnetische Suszeptibilität** Einheitenlose Grösse  $\chi_M$ , die Magnetisierbarkeit eines Materials angibt

**Magnetische / relative Permeabilität**  $\mu$  (Materialeigenschaft)  $\mu = 1 + \chi_M = \frac{B_{res}}{B_{vak}}$ . Es gilt:  $\mu < 1$ : Diamagnetismus,  $\mu > 1$ : Paramagnetismus,  $\mu \gg 1$ : Ferromagnetismus

**H-Feld**  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ . Lineares Medium  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

**Zusammenhang Magnetisierung und magnetische Suszeptibilität**  $\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H}$

**3. Maxwellgleichung in Materie**  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_{frei}$

**Maxwellgleichungen in Materie**

Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{frei} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{frei} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

**Weitere wichtige Gleichungen**  $\nabla \cdot \mathbf{J}_{frei} = -\frac{\partial \rho_{frei}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ,  $u_{em} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{H})$

**Ausbreitungsgeschwindigkeit in Materie**  $c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$

**Analysis**

**12.4 VEKTORANALYSIS**

**Nabla-, Laplace-Operator**  $\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$   $\Delta := \nabla \cdot \nabla$

**Gradient**  $\text{grad } f := \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T$

**Divergenz**  $\text{div } \mathbf{F} := \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$

**Rotation**  $\text{rot } \mathbf{F} := \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$

**Satz von Gauß**  $\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div } \mathbf{F} dV$

**Satz von Stokes**  $\oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$

**Kugelkoord.**  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$   $dV = r^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta dr$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial(\sin(\vartheta) V_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \left[ \frac{\partial(\sin(\vartheta) V_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r V_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Zylinderkoordin.  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos(\varphi) \\ \rho \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_z$$

## 12.5 ÄQUIVALENZEN

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

## 12.6 DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

**2. Ordnung, homogen mit konstanten Koeffizienten**  $ay'' + by' + cy = 0$

Die Lösungen der zugehörigen charakteristischen Gleichung  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  seien  $\lambda_{1,2}$ .

- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$  und  $\lambda_1 \neq \lambda_2$   $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

- $\lambda_1 = \lambda_2$   $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$

- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ,  $\beta \neq 0$   $y(x) = (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) e^{\alpha x}$

### Notation & Konventionen

**Ortsvektor**  $\mathbf{r} := (x, y, z)^T$   $r := |\mathbf{r}|$

**Vektor "von 1 nach 2"**  $\mathbf{r}_{21} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  ( $\implies \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2$ )

**Kraft die Körper 2 auf Körper 1 ausübt**  $\mathbf{F}_{12}$  ( $\implies$  setzt in Diagramm bei Körper 1 an)

**Potentialdifferenz von A nach B**  $\phi_{BA} := \phi(B) - \phi(A)$

**Partielle Ableitung**  $f'(x, t) := \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$   $\dot{f}(x, t) := \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$

### Wichtige Seiten aus Bronstein

Sinus und Kosinus: Seite 80

Reihen: Seite 477

Differentialoperatoren: Seite 733/734

Bestimmte Integrale: Seite 1116

Taylorreihe: Seite 486

Taylorreihen von Funktionen: Seite 1075